|  |  |
| --- | --- |
| Asignatura | Cálculo Diferencia e Integral I |
| Unidad | Unidad 1. Procesos infinitos y la noción de límite |
| Aprendizaje | Utiliza las representaciones grá­fica, tabular o algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto a: cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, y a la larga como son estos. |
| Temática | Comportamiento de un proceso in­finito: representación numérica, al­gebraica o gráfica. |

**Tema: Sucesiones y series**

Pantalla 1

**Sucesión**

En forma general, en matemáticas una sucesión es considerada como un conjunto de números escritos en un orden definido. De manera formal una sucesión puede definirse como una función de los números naturales cuyo rango es un conjunto **A** cualquiera de los números reales.

**A**

**Ejemplo 1**

El siguiente conjunto de números forma una sucesión:

De manera iterada se va aumentando el valor del denominador en una unidad, en esta sucesión cada término se puede expresar a través de una función como:

con

Dicha expresión nos permite predecir el valor que tendrá algún elemento de la sucesión, por ejemplo, el elemento 30 de la sucesión será:

**Actividad:** Contesta las siguientes preguntas, con base en las siguientes gráficas

1. ¿Cuál es la función que genera la sucesión formada por los siguientes conjuntos de números?
2. \[a\_n=2n \]
3. \[a\_n=(n+2)^2 \]
4. \[a\_n=n+2 \]
5. \[a\_n=2^n \]
6. ¿Cuál es la función que genera la sucesión formada por los siguientes conjuntos de números?

\[ \left{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right} \]

1. \[a\_n=\frac{1}{2n} \] con \[n=1, 2, 3, 4, \dots \]
2. \[a\_n=\frac{1}{2n^2} \] con \[n=1, 2, 3, 4, \dots \]
3. \[a\_n=\frac{1}{2^n} \] con \[n=0, 1, 2, 3, 4, \dots \]
4. \[a\_n=\frac{1}{(n+1)^2} \] con \[n=0, 1, 2, 3, 4, \dots \]

## Límite de una sucesión

Consideremos que cada elemento de una sucesión es generado por la siguiente relación:

\[a\_n=\frac{1}{n}\] con \[n=1, 2, 3, 4, \dots \]

para poder visualizar y poder entender de mejor manera el comportamiento de la sucesión grafiquemos las parejas \[n, a\_n\]:

<https://www.geogebra.org/m/ca43ajce>

Como se puede observar los términos de la sucesión \[a\_n=\frac{1}{n}\] se hacen pequeños a medida que el valor de se hace grande, de hecho, los términos serán tan pequeños que se considera que tienden a cero conforme los valores de n son suficientemente grandes.

En otras palabras, ¿cuál es el valor límite de los elementos de la sucesión \[a\_n\]cuando \[n\] tiende a infinito?

\[\lim\_{n\rightarrow \infty} \frac{1}{n}=\]

1. \[ 1 \]
2. \[\frac{1}{2} \]
3. \[0\]
4. \[\frac{1}{4} \]

**Actividad**. Dada la sucesión \[a\_n=\frac{2n-4}{n-1} \], usa el applet y responde:

<https://www.geogebra.org/m/cchrjret>

¿cuál es el valor límite de los elementos de la sucesión cuando tiende a infinito?

1. \[ 2 \]
2. \[\frac{1}{2} \]
3. \[-2 \]
4. \[\frac{1}{4} \]

En forma general, si los términos de una sucesión se aproximan a un valor cuando n se aproxima al infinito el valor límite de esta sucesión será .

\[ \lim\_{n\rightarrow \infty}a\_n=L\]

Pantalla 2

# Situaciones que dan lugar a procesos infinitos

Imaginemos que tenemos una pelota a cierta altura del suelo, la cual dejamos caer y rebota varias veces de manera vertical, en su primer rebote contra el suelo llega a la mitad de la altura inicial, en el segundo nuevamente alcanza la mitad del rebote anterior y continua este proceso de manera sucesiva.

<https://www.geogebra.org/m/syfz5qgv>

¿Si la pelota rebota 3 veces qué distancia recorrió la pelota?

¿Si la pelota rebota 5 veces qué distancia recorrió la pelota?

¿Si la pelota rebota 8 veces qué distancia recorrió la pelota?

**Análisis del proceso**

…

El primer momento seria cuando cae unidades, el segundo sería \[\frac{a}{2}\], el tercero \[\frac{a}{4}\] y así sucesivamente por lo que es claro que esta sucesión seria:

\[a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \frac{a}{16}, \frac{a}{32}, \frac{a}{64}, \dots \]

Para conocer la distancia recorrida por la pelota es necesario sumar cada uno de los términos de esta sucesión dos veces, ya que la pelota sube y después baja.

\[d\_{recorrida}=s\_n=a+\frac{2a}{2}+\frac{2a}{4}+\frac{2a}{8}+\frac{2a}{16}+\frac{2a}{32}+\dots \]

Simplificando

\[d\_{recorrida}=s\_n=2a+\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{8}+\frac{a}{16}+\frac{a}{32}+\cdots \]

\[d\_{recorrida}=s\_n=a+a(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots) \]

A partir de esta última expresión es posible contestar preguntas tales como:

¿Si la pelota rebota 3 veces qué distancia recorrió la pelota?

**Solución**

\[s\_3=2+2(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=5.5 m \]

En la primera vez que cae recorre dos metros, en el primer rebote sube y baja un metro, entonces ha recorrido cuatro metros; en el segundo rebote sube y baja metros, con lo que ha recorrido metros; finalmente, en el tercer rebote, sube y baja metros, y en total metros.

Con la información obtenida completa la tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Rebotes | \[s\_n\] | Distancia |
| 1 | \[s\_1=2+2(1) \] | 4m |
| 2 | \[s\_2=2+2\left(1+\frac{1}{2}\right) \] |  |
| 3 | \[s\_3=2+2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) \] |  |
| 4 | \[s\_4=2+2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) \] | 5.75 m |
| 5 | \[s\_5=2+2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) \] | 5.875m |
| 6 | \[s\_6=2+2\left (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right) \] |  |

La expresión

\[d\_{recorrida}=s\_n=a+\frac{2a}{2}+\frac{2a}{4}+\frac{2a}{8}+\frac{2a}{16}+\frac{2a}{32}+\dots \]

Se puede también expresar de la siguiente manera:

\[d\_{recorrida}=2+2\cdot\sum\_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \]

Esta expresión es la sumatoria de todos los términos la cual se denomina **serie** y se simboliza por la letra sigma (∑).

Ésta es otra manera de expresar la sumatoria, para entender mejor supongamos que estamos interesados en conocer la distancia recorrida en el cuarto rebote, entonces:

\[d\_{recorrida}=2+2\cdot\sum\_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=a+a\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \]

Elevando las potencias de los paréntesis:

\[d\_{recorrida}=a+a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) \]

En el caso en el que tenemos:

\[d\_{recorrida}=2+2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=5.75 m \]

Usa la serie que encontramos para determinar:

\[d\_{recorrida}=2+2\cdot\sum\_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\]

Esta expresión nos permite hacer uso de la calculadora para poder hacer cálculos.

Después de ver el video contesta las siguientes preguntas:

1. La distancia recorrida si la pelota rebota 5 veces: \_\_\_\_\_\_\_
2. La distancia recorrida si la pelota rebota 5 veces: \_\_\_\_\_\_\_
3. La distancia recorrida si la pelota rebota 20 veces:\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Pantalla 3

## Suma parcial de una serie

Como se ha comentado estamos interesados en conocer ¿Cómo se calcula la suma de los n términos de una serie geométrica? Para dar respuesta a esta pregunta consideremos la siguiente serie:

\[S\_n=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\dots+ar^{n-1} \] con \[-1<r<1 \]

Si multiplicamos esta serie por la razón común

\[rS\_n=ar+ar^2+ar^3+ar^4+\dots+ar^n \]

Si restamos ambas series obtendremos:

\[S\_n-rrS\_n=a+\sout{ar-ar+ar^2-ar^2+ar^3-ar^3+\dots+ar^{n-1}-ar^{n-1}}-ar^n \]

\[S\_n-rS\_n=a-ar^n \]

De esta expresión podemos factorizar y despejar el valor de la sumatoria:

\[(1-r)S\_n=a-ar^n \]

\[S\_n=ar+ar^2+ar^3+ar^4+\dots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{\left(1-r\right)} \]

Esta última expresión es usual expresarla mediante el símbolo sigma ∑ para indicar un proceso de suma.

\[S\_n=\sum\_{k=0}^{n}{ar^n}=\frac{a-ar^n}{\left(1-r\right)} \]

con \[ -1<r<1 \]

Este resultado nos permite conocer el valor de la suma para algún valor de en especial.

En el problema de la pelota que rebota [\a=2\], \[r=\frac{1}{2} \]

\[d\_{recorrida}=2+\sum\_{k=0}^{n}{2\left(\frac{1}{2}\rgiht)^{k-1}=2+\frac{2-2 \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{2} \right)} \]

Si usamos el resultado encontrado

\[ d\_{recorrida}=2+\frac{2-2 \left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(1-\frac{1}{2} \right)}=2+\frac{2-\frac{2}{16}}{\frac{1}{2}}=2+\frac{\frac{30}{16}}{\frac{1}{2}}=2+\frac{30}{8}=\frac{46}{8}=5.75 m \]

Como ya sabíamos, podemos notar la serie expresada en la notación sigma es una forma “compacta” de expresar la suma de todos los elementos de una sucesión.

Usa el valor de la serie que encontramos y contesta las preguntas:

\[ d\_{recorrida}=2+\frac{2-2 \left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(1-\frac{1}{2} \right)}=2+\frac{2-\frac{2}{16}}{\frac{1}{2}}=2+\frac{\frac{30}{16}}{\frac{1}{2}}=2+\frac{30}{8}=\frac{46}{8}=5.75 m \]

\[d\_{recorrida}=2+\sum\_{k=0}^{n}{2\left(\frac{1}{2}\rgiht)^{k-1}=2+\frac{2-2 \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{2} \right)} \]

1. Determina la distancia recorrida si la pelota rebota 8 veces
2. Determina la distancia recorrida si la pelota rebota 10 veces
3. Determina la recorrida si la pelota rebota 20 veces
4. La serie converge: **Si**
5. El valor al que converge la serie es 6: **Si**

De manera general:

Una sumatoria de *n* términos de la forma:

\[S\_n=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\dots+ar^{n-1}= \sum\_{k=1}^{n}{ar^{k-1}=\frac{a-ar^n}{\left(1-r\right)} \]

Pantalla 4

## Procesos infinitos

Una pregunta interesante sería intentar responder:

*¿Cuál sería la distancia que la pelota recorrería si pudiera rebotar una infinidad de veces bajo las mismas condiciones?*

Sabemos que la distancia recorrida en *n*-ésimo rebote está dado por la expresión:

\[s\_n=a+\sum\_{n=0}^{3}a\left(\frac{1}{2}\right)^n=a+a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\]

Y estamos interesados en conocer el valor límite de esta suma si es que la pelota rebotara una infinidad de veces. En matemáticas este hecho se puede expresar:

\[ d\_{recorrida}=\lim\_{n\rightarrow \infty}S\_n \]

En esta expresión se indica que estamos interesados en conocer el valor límite de la sucesión cuando la cantidad de rebotes tiende a infinito, esto es, se toman valores de cada vez más grandes.

## Suma infinita de una serie

Es interesante notar que el proceso del rebote de una pelota que hemos venido trabajando se puede realizar en teoría una cantidad infinita de veces, por lo cual sería interesante conocer ¿Cuál es el valor límite de la suma?

Para ello consideremos que el valor de la razón común en la serie ***r*** tiene un valor \[-1<x<1 \], entonces, cuando tiende a infinito \[(n\rightarrow \infty \] el valor de la razón elevado a la potencia como hemos visto tenderá a cero \[r^n \rightarrow 0 \], en otras palabras, el valor límite de la suma será:

0

Por lo anterior el valor límite de la serie será:

\[ S=\lim\_{n\rightarrow\infty}S\_n=\sum\_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{(1-r)} \]

Con esta herramienta podemos conocer la distancia que recorrería hipotéticamente la pelota del ejemplo, si rebotara una infinidad de veces.

En cuanto a la suma infinita (suma de todos los términos), converge cuando \[-1<r<1\]\*

\[S=\lim\_{n\rightarrow \inftyS\_n=\lim\_{n\rightarrow \infty\left(\sum\_{k=0}^{n}ar^{k-1}\right)=\lim\_{n\rightarrow \infty}\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}\]

En nuestro caso dicha distancia recorrida será:

\[d\_{recorrida}=a+\sum\_{n=0}^{\infty}{a\left(\frac{1}{2}\rgiht)^{n} \]

Como podemos observar el valor de es menor uno, por lo que la serie converge a:

\[ d\_{recorrida}=a+\frac{a}{1-\frac{1}{2}}

\[ d\_{recorrida}=a+2a=3a \]

Por ejemplo, si la altura de la que cae es de 2m la distancia total que recorrería en el infinito sería de:

\[ d\_{recorrida}=3(2m)=6m \]

Es interesante notar que, en la tabla realizada previamente, nos sugería que la distancia recorrida se aproximaba al valor de seis metros. La convergencia de la serie geométrica nos permite determinar su valor.

En resumen:

Una serie geométrica es de la forma:

\[\sum\_{n=1}^{\infty}{ar^{n-1}}=a+ar+ar^2+ar^3+\dots+ar^{n-1}+\dots \]

Dicha serie converge siempre que \[ -1<r<1 \], siendo el valor de su suma:

\[ \sum\_{n=1}^{\infty}{ar^{n-1}=\frac{a}{\left(1-r\right)} \]

Y diverge cuando

\[ r\leq -1 \] o bien \[r\geq 1 \]

Pantalla 5

## Ejemplos resueltos

En esta sección se presentan algunos ejemplos de aplicación de las sucesiones y series geométricas

**Ejemplo 1**

A una partícula que se mueve en línea recta, se le aplica una fuerza, de manera que cada segundo la partícula recorre la mitad de la distancia que ha recorrido en el segundo anterior. Si la partícula recorre 20 cm en el primer segundo. ¿Qué distancia total recorrerá?

**Solución**

Nos dicen que la distancia disminuye la mitad por cada segundo, por lo que podemos expresarla distancia total que recorre como:

\[d\_{total}=d\_{inicial}+\frac{d\_{inicial}}{2}+\frac{d\_{inicial}}{4}+\frac{d\_{inicial}}{8}+\frac{d\_{inicial}}{16}+\frac{d\_{inicial}}{32}+\cdots \]

Factorizando \[d\_{inicial} \] tenemos:

\[d\_{total}=d\_{inicial}+d\_{inicial}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\right] \]

Esto se puede escribir como:

\[d\_{total}=d\_{inicial}+d\_{inicial}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots\right] \]

O bien:

\[d\_{total}=d\_{inicial}+d\_{inicial}\cdot\sum\_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \]

En nuestro problema sabemos que:

\[\sum\_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{(1-r)}\] y \[d\_{inicial}=20\; cm \]

\[d\_{total}=20+20\sum\_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=20+20\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=20+20=40\;\]

\[d\_{total}=20+20\sum\_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 20+20 \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)=20+20=40 \; cm \]

**Ejemplo 2**

Se deja caer una pelota de una altura de 10 metros, la cual rebota varias veces. En el primer rebote llega a las dos terceras parte de la altura inicial, en el segundo recorre la novena parte de la altura inicial, en el tercero rebota una veintisieteava parte, en el cuarto una ochentaiunava y así sucesivamente.

1. ¿Cuál será la distancia recorrida por la pelota después de 5 rebotes, si continua el mismo proceso?
2. ¿Cuál será la máxima distancia recorrida?

**Solución:**

1. \[d\_n=10+\frac{2}{3}(10)+\frac{2}{3^2}(10)+\frac{2}{3^3}(10) +\frac{2}{3^4}(10)+\cdots +\frac{2}{3^n}(10) \]

\[d\_n=10+2(10)\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}\right] \]

\[d\_n=10+20\cdot\sum\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\]

\[d\_n=10+20\left[\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right] \]

\[d\_5=10+20\left[\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}}\right]=10+20\left(\frac{121}{243}\right)=\frac{4850}{243}=19.9588 \; m \]

1. En el límite cuando n tiende a infinito tenemos:

\[\lim\_{n\rightarrow\infty}{d\_n}=10+20\left[\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right]=10+20\left[\frac{1}{2}\right]=20\; m \]

**Ejemplo 3**

Expresa el número decimal periódico como una suma infinita y calcula su valor.

**Solución**

El número decimal periódico se puede escribir como:

\[ 0.7\bar{3}=0.7+0.03+0.003+0.0003+0.00003+0.000003+\dots \]

Otra forma de escribirlo es:

\[ 0.7\bar{3}=\frac{7}{10} +3\left(\frac{1}{10}\right)^2 +3\left(\frac{1}{10}\right)^3 +3\left(\frac{1}{10}\right)^4 +3\left(\frac{1}{10}\right)^5 +3\left(\frac{1}{10}\right)^6 +\cdots \]

Factorizando la expresión \[ 3\left(\frac{1}{10}\right) \] podemos escribir este número como:

\[ 0.7\bar{3} \approx \frac{7}{10}+3\frac{1}{10}\left[\left(\frac {1}{10}\right)+\left(\frac {1}{10}\right)^2 +\left(\frac{1}{10}\right)^3 +\left(\frac{1}{10}\right)^4 +\left(\frac{1}{10}\right)^5+\cdots \right] \]

\[ 0.73 ̅\approx \frac{7}{10}+\frac 3\left(\frac{1}{10}\left[\left(\frac {1}{10}\right)+\left(\frac {1}{10}\right)^2 +\left(\frac{1}{10}\right)^3 +\left(\frac{1}{10}\right)^4 +\left(\frac{1}{10}\right)^5+\cdots \right] \]

En forma de sumatoria:

\[0.7\bar{3}=\frac{7}{10}+3\left(\frac{1}{10}\right)\cdot\sum\_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{7}{10}+3\left(\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{\frac{1}{10}}{\left(1-\frac{1}{10}\right)} \]

\[0.7\bar{3}=\frac{7}{10}+3\left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{1}{9}\right)= \frac{7}{10}+\frac{1}{30}=\frac{11}{15} \]